

Тема 7 Кручение

Основные понятия

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент ($M_{кр}$, другое обозначение – M_z).

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах, в элементах пространственных конструкций и т.п.

Валом обычно называется стержень, испытывающий деформацию кручения совместно с изгибом.

Деформация кручения наблюдается, если прямой брус нагружен внешними моментами (парами сил M), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси

В чистом виде деформация кручения встречается редко, обычно присутствуют и другие внутренние силовые факторы (изгибающие моменты, продольные силы).

Внешние крутящие моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, там, где поперечная нагрузка смещена относительно оси вала.

Мы будем рассматривать прямой брус только в состоянии покоя или равномерного вращения. В этом случае алгебраическая сумма всех внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу, будет равна нулю.

При расчете брусев, испытывающий деформацию кручения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки надо решить две основные задачи. Это определение напряжений (от $M_{кр}$), возникающих в брусе, и нахождение угловых перемещений в зависимости от внешних скручивающих моментов.

Крутящий момент

В ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за 1 секунду (1 с), выраженный в радианах, равен $\frac{n}{60} \cdot 2\pi = \frac{\pi \cdot n}{30}$. Работа скручивающего момента M за 1 с,

т. е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за 1 с:

т. е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за 1 с:

$$N = M \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}, \text{ откуда } M (\text{кГ} \cdot \text{м}) = \frac{30 \cdot N (\text{кГ} \cdot \text{м/с})}{\pi \cdot n (\text{об/мин})}.$$

Если мощность N задана в лошадиных силах (л.с.), то

$$M(\text{кг} \cdot \text{м}) = \frac{30 \cdot 75 \cdot N}{\pi \cdot n} = 716,2 \cdot \frac{N(\text{л.с.})}{n(\text{об/мин})} \quad \text{или} \quad M(\text{н} \cdot \text{м}) = 7024 \cdot \frac{N(\text{л.с.})}{n(\text{об/мин})}.$$

Если мощность N задана в киловаттах, то, учитывая, что 1 л.с. равна 0,736 кВт, получаем

$$M(\text{кг} \cdot \text{м}) = 973,6 \cdot \frac{N(\text{квт})}{n(\text{об/мин})} \quad \text{или} \quad M(\text{н} \cdot \text{м}) = 9548 \cdot \frac{N(\text{квт})}{n(\text{об/мин})}$$

Крутящие моменты $M_{кр}$ (M_z), возникающие в поперечных сечениях бруса, определяются по внешним скручивающим моментам M с помощью метода сечений.

В простейшем случае, когда брус нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия вала $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 7.1, крутящий момент $M_{кр}$ в любом поперечном сечении бруса (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $|M_1| = |M_2|$.

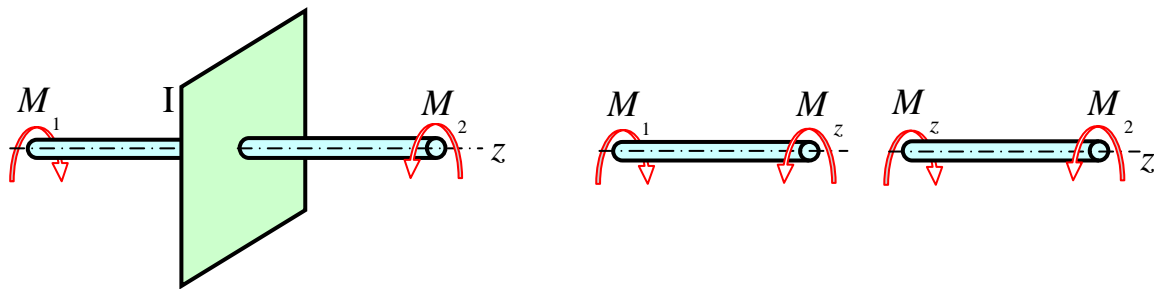


Рис. 7.1

В более сложных случаях, когда к прямому брусу приложено несколько внешних моментов, крутящие моменты $M_{кр}$ в поперечных сечениях различных участков бруса неодинаковы.

На основании метода сечений *крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

При расчетах на прочность знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эп. $M_{кр}$ примем следующее правило знаков: *крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса действующий на него момент представляется направленным по ходу часовой стрелки* (рис. 7.2).

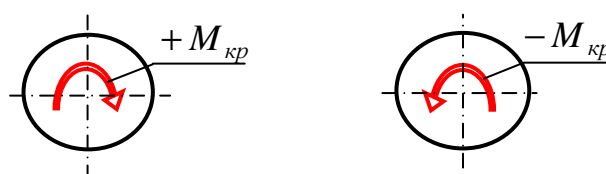


Рис. 7.2

На рис. 7.3, а изображен стержень, жестко защемленный в правом конце-вом сечении, к которому приложены три внешних скручивающих момента.

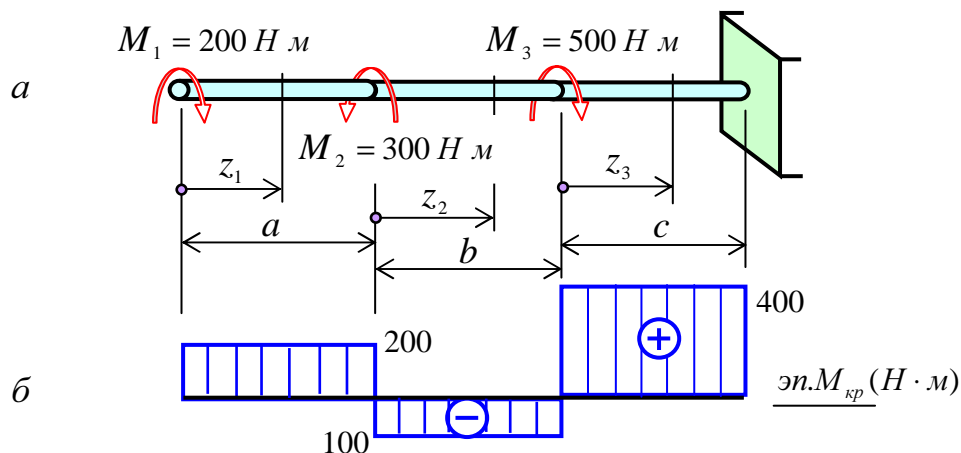


Рис. 7.3

В нашем случае крутящие моменты $M_{кр}$ в их поперечных сечениях удобно выразить через внешние моменты, приложенные со стороны свободного конца стержня.

Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента, возникающего в заделке.

Крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 1–1 ($0 \leq z_1 \leq a$) численно равен $M_1 = 200 \text{ H}\cdot\text{м}$ и, согласно принятому правилу знаков, положителен.

Крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 2–2 ($0 \leq z_2 \leq b$) численно равен алгебраической сумме моментов M_1 и M_2 , т.е. $M_{кр} = 200 - 300 = -100 \text{ H}\cdot\text{м}$, а его знак зависит от соотношения этих моментов.

Аналогичным образом вычисляется крутящий момент $M_{кр}$ в сечении 3–3 ($0 \leq z_3 \leq c$): $M_{кр} = 200 - 300 + 500 = 400 \text{ H}\cdot\text{м}$.

График, показывающий изменение крутящих моментов по длине вала, называется эпюрой крутящих моментов. На рис. 7.3, б показана такая эпюра для стержня, изображенного на рис. 7.3, а.

Каждая ордината эп. $M_{кр}$ в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении стержня, которому соответствует эта ордината.

В сечении, в котором к стержню приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента.

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведется расчет бруса на прочность и жесткость.

Напряжения и деформации

Рассмотрим прямой брус с поперечным сечением в виде круга, нагруженный на концах скручивающими моментами M (рис. 7.4, а).

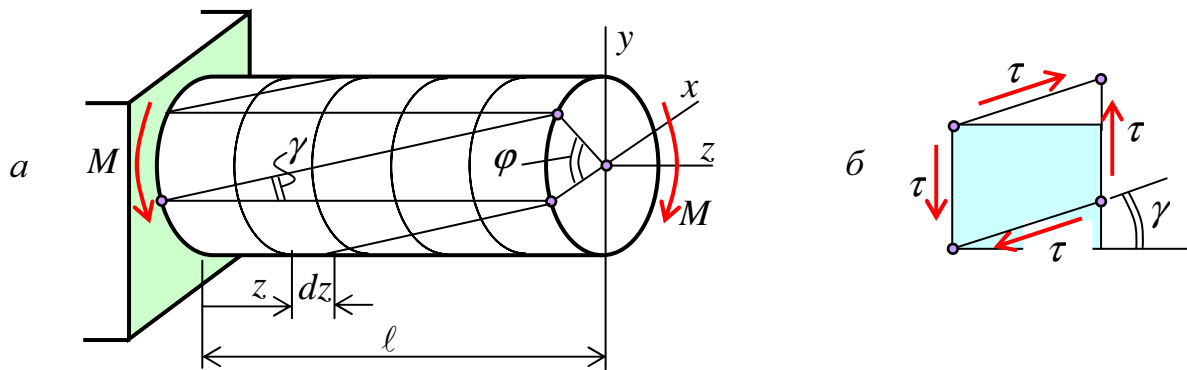


Рис. 7.4

Для наглядного представления характера деформации бруса при кручении проводится следующий опыт. На цилиндрическую поверхность бруса наносится равномерная сетка линий, состоящая из окружностей и образующих. Как видно, поворот правого торцевого сечения относительно неподвижного левого на угол φ (назовем его углом закручивания стержня) вызывает поворот продольных волокон на угол γ (угол сдвига), поскольку на величину γ искажаются углы ортогональной сетки продольных и поперечных рисок модели (рис. 7.4, б).

Отношение угла закручивания φ к длине участка l называется *относительным углом закручивания*, который обозначается $\theta = \frac{\varphi}{l}$, или в дифференциальной форме $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$.

При деформации все образующие остаются параллельными друг другу и сдвигаются на один и тот же угол γ (рис. 7.4, а), а прямоугольники, нанесенные на поверхность бруса сетки, становятся параллелограммами (рис. 7.4, б). При этом длина l остается постоянной ($l = \text{const}$), что говорит об отсутствии нормальных напряжений в поперечном сечении бруса ($\sigma_z = 0$).

Все это позволяет сделать следующее предположение, которое будет в дальнейшем принято при выводе формул: материал бруса на поверхности находится в состоянии чистого сдвига, где $\gamma = \frac{\tau}{G}$.

Теория кручения брусев, имеющих круглое сплошное поперечное сечение, основана на следующих предположениях:

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (справедлива гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли).
2. Расстояния (вдоль оси бруса) между поперечными сечениями не изменяются, следовательно $\varepsilon_z = 0$.

3. Контуры поперечных сечений и их радиусы не деформируются. Это означает, что поперечные сечения ведут себя как жесткие круговые пластинки, поворачивающиеся при деформировании относительно оси стержня z . Отсюда следует, что любые деформации в плоскости пластинки равны нулю, в том числе и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

4. Материал стержня подчиняется закону Гука. Поскольку $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, то и $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$. Это означает, что в поперечных сечениях стержня возникают лишь *касательные напряжения* τ , а вследствие закона парности касательных напряжений, равные им напряжения действуют и в сопряженных продольных сечениях. Следовательно напряженное состояние стержня – *чистый сдвиг*.

Формулы, выведенные на основе этих положений, совпадают с формулами, полученные точными методами теории упругости, и подтверждаются экспериментально.

Поскольку задача по определению напряжений является статически неопределимой, т. е. неизвестных больше чем независимых уравнений равновесия, то для получения дополнительных уравнений необходимо рассмотреть геометрическую и физическую стороны задачи.

Геометрическая сторона задачи.

Двумя смежными сечениями вырежем элемент стержня длиной dz и, поскольку нас интересуют деформации элемента, левое сечение его будем считать неподвижным (рис. 7.5, а, б).

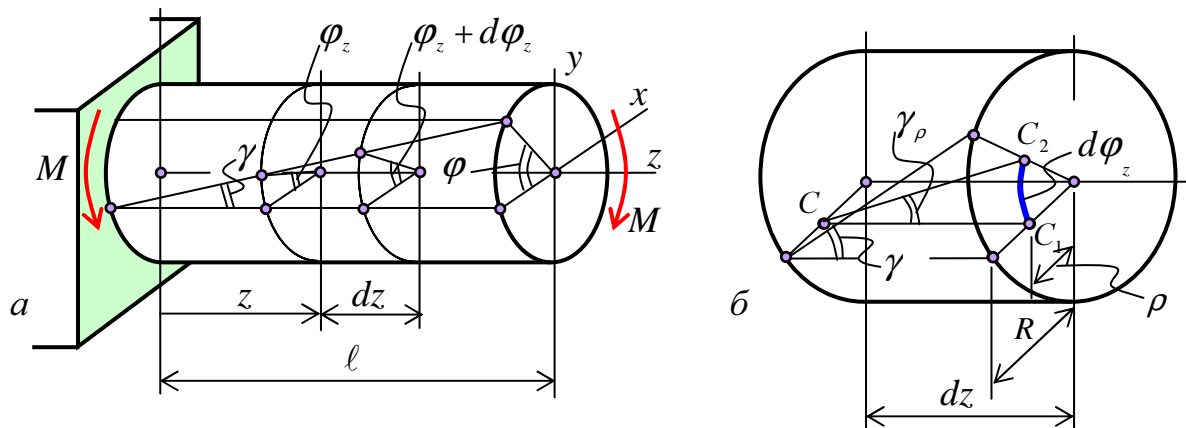


Рис. 7.5

При повороте правого сечения на угол $d\varphi_z$ в соответствии с гипотезой о недеформируемости радиусов, правый конец волокна CC_1 (отстоящий от оси элемента на величину полярного радиуса ρ) будет перемещаться по дуге C_1C_2 , вызывая поворот волокна на угол сдвига

$$\gamma_\rho = C_1 C_2 / C C_1 = \frac{\rho \cdot d\varphi_z}{dz} = \rho \cdot d\theta.$$

Статическая сторона задачи.

Рассмотрим две элементарные площадки dA поперечного сечения бруса, расположенные на общем диаметре на равных расстояниях ρ от центра тяжести круглого сечения o (рис. 7.6, а).

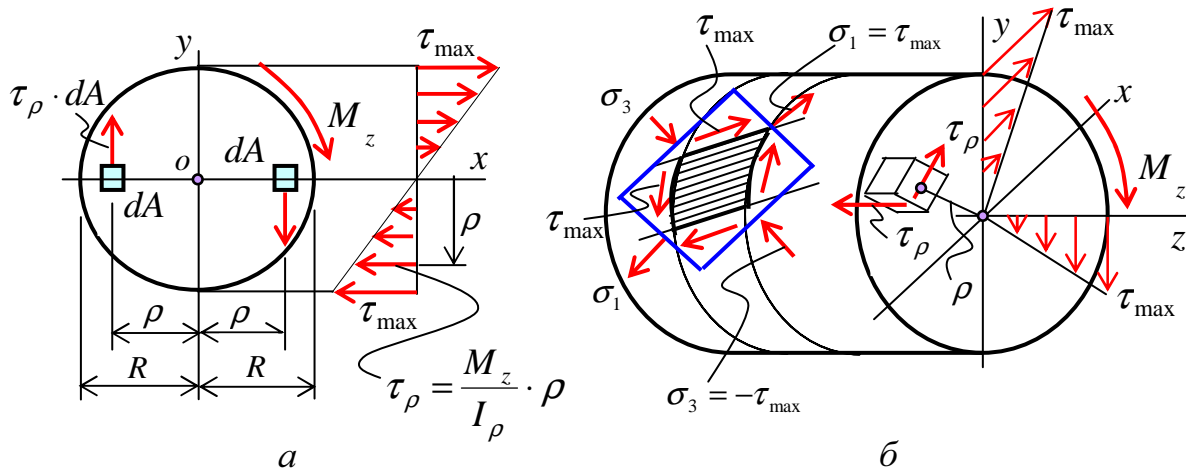


Рис. 7.6

Силы, действующие на каждую из этих площадок, равны $(\tau_\rho \cdot dA)$, расположены в плоскости поперечного сечения бруса и направлены перпендикулярно к диаметру в противоположные стороны. Они образуют элементарную пару сил.

Таких пар возникает в поперечном сечении бесконечное множество. Все они приводятся к одному моменту, действующему в плоскости поперечного сечения и представляющего собой крутящий момент M_z , который из условия статики будет равен:

$$M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA.$$

Физическая сторона задачи.

Величина касательных напряжений, на основании закона Гука при сдвиге, равна

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho.$$

Синтез.

Итак, после рассмотрения трех сторон задачи, мы получили следующую совместную систему из трех уравнений (условие равновесия, геометрическое и физическое уравнения).

Решая эту систему мы получаем все необходимые формулы для определения напряжений и деформаций, а также геометрические характеристики, которые соответствуют деформации кручения.

$$\left\{ \begin{array}{l} M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA \\ \gamma_\rho = \frac{\rho \cdot d\varphi_z}{dz} \\ \tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} M_z = \int_A \tau_\rho \cdot \rho \cdot dA \\ \tau_\rho = G \cdot \frac{\rho \cdot d\varphi_z}{dz} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad M_z = G \cdot \frac{d\varphi_z}{dz} \cdot \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

С учетом $I_\rho = \int_A \rho^2 \cdot dA$, имеем относительный или погонный угол закручивания θ , который является мерой деформации стержня при кручении и определяется выражением $\theta = \frac{d\varphi_z}{dz} = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho}$. Отсюда угол закручивания элемента длиной dz равен $d\varphi_z = \frac{M_z \cdot dz}{G \cdot I_\rho}$, а полный угол закручивания стержня длиной l при $M_z = const$ и $(G \cdot I_\rho) = const$ будет равен $\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_\rho}$ (закон Гука при кручении), и, следовательно, $\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_z}{G \cdot I_\rho}$.

Касательные напряжения в любой точке сечения определяются выражением $\tau_\rho = G \cdot \rho \cdot \frac{M_z}{G \cdot I_\rho} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho$. Значение напряжений при кручении не зависят от физических свойств материала вала, так как величина G в формулы напряжений не входит. Значения же деформаций зависят от свойств материала. График изменения величины касательных напряжений τ_ρ вдоль какого-либо радиуса (т.е. эпюра касательных напряжений) изображается прямой линией (см. рис. 7.6, а).

Видно, что углы сдвига и касательные напряжения пропорциональны расстояниям от оси стержня. В центре (при $\rho=0$) касательные напряжения равны нулю, в точках же, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса, т.е. точках контура его поперечного сечения они наибольшие.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_z}{W_\rho}, \quad \text{где} \quad I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot R^4}{2} \quad \text{и} \quad W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot R^3}{2}.$$

Полярным моментом сопротивления сечения W_ρ называется отношение полярного момента инерции I_ρ к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удаленной его точки ρ_{\max} ($W_\rho = I_\rho / \rho_{\max}$).

Произведение модуля поперечного сдвига на полярный момент инерции ($G \cdot I_\rho$) называется *жесткостью поперечного сечения* стержня при кручении.

Забегая вперед, отметим, что полученные формулы для напряжений и деформаций по структуре аналогичны формулам для напряжений и деформаций при изгибе стержня.

Напряжения в продольных сечениях бруса

Касательные напряжения в поперечных сечениях бруса направлены в каждой точке перпендикулярно к текущему радиусу ρ . Из условия парности следует, что точно такие же напряжения возникают и в продольных сечениях бруса (рис. 7.7, а).

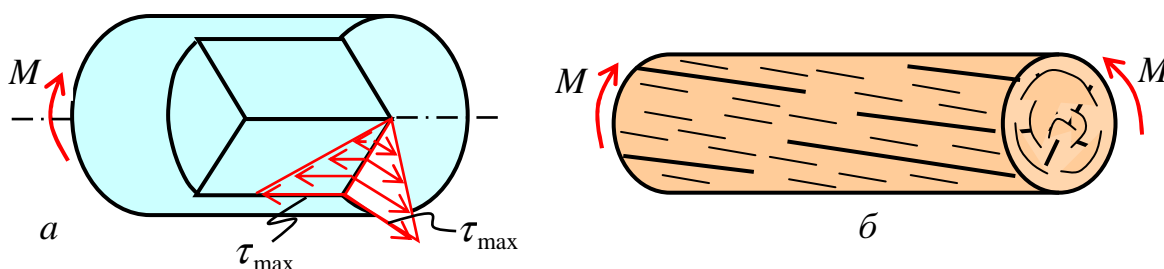


Рис. 7.7

Наличие этих напряжений проявляется при испытании на кручение деревянных образцов. Так, разрушение стержня из дерева, имеющего сравнительно низкую прочность на скалывание вдоль волокон, начинается с образования продольных трещин (рис. 7.7, б). Разрушение стержня из хрупкого металла (например, чугуна) происходит по сложной винтовой поверхности, соответствующей максимальным растягивающим напряжениям, т.е. по траектории главного напряжения σ_3 (рис. 7.6, б).

Кручение стержней, имеющих поперечное сечение в форме кольца

Все формулы, полученные для расчета на кручение прямых стержней круглого сплошного сечения, применимы и для стержней кольцевого поперечного сечения (рис. 7.8). Полярный момент инерции здесь определяется как разность моментов инерции кругов с диаметрами d и $(\alpha \cdot d)$:

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} - \frac{\pi \cdot (\alpha \cdot d)^4}{32} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad W_\rho = \frac{\pi \cdot d^4 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot 2}{32 \cdot d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

Отметим, что полярный момент сопротивления кольцевого сечения *не равен* разности полярных моментов сопротивления, подсчитанных для двух сплошных сечений: одного с диаметром, равным наружному диаметру кольца, а другого – внутреннему (часто встречающаяся ошибка).

При одинаковой площади поперечного сечения (т.е. при одинаковом расходе материала) полярные моменты инерции и момент сопротивления для кольцевого сечения, которое не имеет площадок, близко расположенных к центру, значительно больше чем для сплошного круглого сечения. Поэтому

Стержень кольцевого сечения при кручении является более экономичным, чем стержень сплошного круглого сечения, т. е. требует меньшего расхода материала. Но при проектировании брусков следует учитывать, что в случае кольцевого сечения их изготовление сложнее, а значит, и дороже.

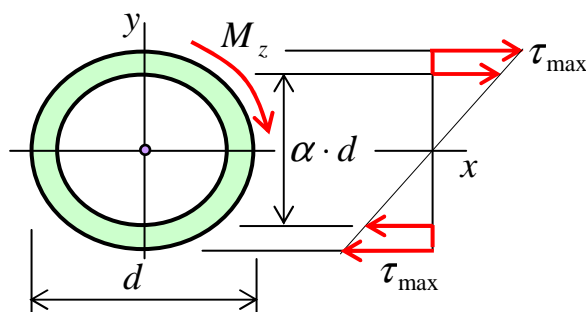


Рис. 7.8

Условие прочности

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом стержне, не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

или при постоянном сечении стержня

$$\frac{\max M_z}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Это требование называется условием прочности.

Допускаемое напряжение при кручении $[\tau]$ зависит от свойств материала рассчитываемого стержня и от принятого коэффициента запаса прочности $[n]$:

$$[\tau] = \tau_{\text{пред}} / [n].$$

В случае пластичного материала в качестве опасного (предельного) напряжения $\tau_{\text{пред}}$ принимается τ_m – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала τ_e – предел прочности.

Часто допускаемые напряжения на кручение принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала. Например, для стали $[\tau] \approx 0.5 \cdot [\sigma]$; для чугуна $[\tau] \approx [\sigma_p]$, где $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении чугуна.

Эти значения допускаемых напряжений относятся к случаям работы элементов конструкций на чистое кручение при статическом нагружении.

Валы, являющиеся основными объектами, рассчитываемыми на кручение, кроме кручения, испытывают также изгиб. Кроме того, возникающие в них напряжения переменны во времени. Поэтому, в зависимости от материала и условий работы для стальных валов принимают пониженные значения допускаемых напряжений $[\tau]$.

Величина τ_{\max} в условии прочности представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении бруса в непосредственной

близости к его внешней поверхности. Опасным сечением бруса является сечение, для которого абсолютная величина отношения M_z/W_ρ имеет наибольшее значение. Для бруса постоянного сечения наиболее опасным является сечение, в котором крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

Условие жесткости

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad \text{или} \quad \frac{\max M_z}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta].$$

Типы задач

В практике инженерных расчетов обычно решаются три основные задачи. Это *проверочный расчет (проверка напряжений)*. В этом случае известны внешняя нагрузка, сечение стержня и его материал. Необходимо убедиться, что выполняется условие прочности или жесткости

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad \text{или} \quad \theta_{\max} \leq [\theta].$$

Подбор сечения (проектный расчет). По заданной нагрузке определяются размеры поперечного сечения стержня из известного материала

$$W_\rho \geq \frac{\max M_z}{[\tau]} \quad \text{или} \quad I_\rho \geq \frac{\max M_z}{G \cdot [\theta]}.$$

Определение *допускаемой нагрузки*, то есть максимального значения нагрузки, которое допускает данный элемент конструкции при выполнении условия прочности или жесткости

$$\max M_z \leq [\tau] \cdot W_\rho \quad \text{или} \quad \max M_z \leq [\theta] \cdot G \cdot I_\rho.$$